Limites

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > -1$. On note $f = x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que la sous-suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est toujours positive.
2) Montrer que la seule limite pour la suite (u_n) est φ.
3) Montrer que si $a = \varphi$ la suite (u_n) est constante. Montrer que si $a < \varphi$ alors la suite est croissante et que pour tout $n \geq 0$, $u_n < \varphi$. Montrer que si $a > \varphi$ la suite est décroissante et que pour tout $n \geq 0$, $u_n > \varphi$.
4) Montrer que pour tout $x \in [\varphi;\ +\infty[$, nous avons : $f'(x) \leq \frac{1}{2\varphi}$
5) En déduire que pour tout $x \in [\varphi;\ +\infty[$, nous avons : $|f(x) - \varphi| \leq \frac{1}{2\varphi}|x - \varphi|$
6) En déduire que pour $a > \varphi$, la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 0$: $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \varphi|$
7) En déduire que pour $a > \varphi$, la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 0$: $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$
8) En prenant a tel que $|u_0 - \varphi| < 1$, combien d'étapes sont suffisantes pour obtenir une valeur approchée de φ à 10^{-9} près ?

Corrigé

1) Montrer que la sous-suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est toujours positive.

Soit $P(n)$: $u_n > 0$

On a $a > -1$ et $u_0 = a$, donc $u_0 > -1$

$u_0 + 1 > 0$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, donc $\sqrt{u_0 + 1} > 0$

Or $f(x) = \sqrt{1+x}$, Et donc $f(u_0) > 0$

Et $u_{n+1} = f(u_n)$, et donc $u_1 = f(u_0)$

Par conséquent, $u_1 > 0$ et donc $P(1)$ *Vrai*

Supposons $P(n)$: $u_n > 0$

$u_n + 1 > 1 > 0$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, donc $\sqrt{u_n + 1} > 0$

Or $f(x) = \sqrt{1+x}$, Et donc $f(u_n) > 0$

Et $u_{n+1} = f(u_n)$

Et Donc $u_{n+1} > 0$: $P(n+1)$

Par conséquent, $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Or, d'après le Théorème de Récurrence, si $P(n_0)$, $P(n) \rightarrow P(n+1) \Longrightarrow \forall n \geq n_0\ P(n)$

Par conséquent $\forall n \geq 1\ \ u_n > 0$

Donc *la sous-suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est toujours (strictement) positive*.

2) Montrer que la seule limite pour la suite (u_n) est φ.

Si u_n converge et $\lim(u_n) = l$, alors $f(l) = l$

$\sqrt{1+l} = l \Rightarrow 1 + l = l^2 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0$

Donc $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$ ou $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

Or, on a $\forall n \geq 1\ \ u_n > 0$. Donc $\lim(u_n) \geq 0$. Donc $l \geq 0$

Or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule valeur positive.

Par conséquent, *Si u_n converge, $\lim(u_n) = \varphi$*

3) Montrer que si $a = \varphi$ la suite (u_n) est constante. Montrer que si $a < \varphi$ alors la suite est croissante et que pour tout $n \geq 0$, $u_n < \varphi$. Montrer que si $a > \varphi$ la suite est décroissante et que pour tout $n \geq 0$, $u_n > \varphi$.

Alternative 1

La fonction $x \mapsto x + 1$ est strictement croissante.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante.

Or, la composée de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Donc $f(x) = \sqrt{x+1}$ est strictement croissante.

Et donc, $x_0 < x_1 \longrightarrow f(x_0) < f(x_1)$

Alternative 2

Supposons $x_0 < x_1$.

Alors $x_0 + 1 < x_1 + 1$

Et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, alors $\sqrt{x_0 + 1} < \sqrt{x_1 + 1}$

Et comme $f(x) = \sqrt{x+1}$, on a $f(x_0) < f(x_1)$

Par conséquent, $x_0 < x_1 \longrightarrow f(x_0) < f(x_1)$

Cas $a = \varphi$

$u_0 = a$

Donc $u_0 = \varphi$

Supposons $u_n = \varphi$

On a $u_{n+1} = f(u_n) = f(\varphi) = \varphi$

Par conséquent, $u_n = \varphi \rightarrow u_{n+1} = \varphi$

Or, d'après le Théorème de Récurrence, si $P(n_0)$, $P(n) \rightarrow P(n+1) \Longrightarrow \forall n \geq n_0\ P(n)$

Par conséquent $\forall n \geq 0\ \ u_n = \varphi$

$a = \varphi \Longrightarrow$ La suite (u_n) est constante

Cas $a < \varphi$

$u_0 = a$

Par conséquent $u_0 < \varphi$

Supposons $u_n < \varphi$

On a $x_0 < x_1 \longrightarrow f(x_0) < f(x_1)$

Donc $f(u_n) < f(\varphi)$

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$, et $f(\varphi) = \varphi$

Donc $u_{n+1} < \varphi$

Par conséquent $u_n < \varphi \rightarrow u_{n+1} < \varphi$

Et par récurrence $\forall n \geq 0\ \ u_n < \varphi$

Si $-1 < x < \varphi$

Alors $x^2 - x - 1 < 0$

Donc $x^2 < x + 1$

Donc $x < \sqrt{x+1}$

Donc $f(x) > x$

Or, $-1 < u_0 < \varphi$, donc $f(u_0) > u_0$

Par conséquent, $u_1 > u_0$

Et f est strictement croissante. Donc $u_{n+1} > u_n \longrightarrow f(u_{n+1}) > f(u_n) \longrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

Donc, par récurrence, $\forall n \geq 0 \;\; u_{n+1} > u_n$

Par conséquent, $a < \varphi \Longrightarrow \forall n \geq 0 \;\; u_n < \varphi$, et (u_n) strictement croissante.

<u>Cas $a > \varphi$</u>

$u_0 = a$

Par conséquent $u_0 > \varphi$

Supposons $u_n > \varphi$

On a $x_0 < x_1 \longrightarrow f(x_0) < f(x_1)$

Donc $f(u_n) > f(\varphi)$

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$, et $f(\varphi) = \varphi$

Donc $u_{n+1} > \varphi$

Par conséquent $u_n > \varphi \rightarrow u_{n+1} > \varphi$

Et par récurrence $\forall n \geq 0 \;\; u_n < \varphi$

Si $x > \varphi$

Alors $x^2 - x - 1 > 0$

Donc $x^2 > x + 1$

Donc $x > \sqrt{x+1}$

Donc $f(x) < x$

Or, $u_0 > \varphi$, donc $f(u_0) < u_0$

Par conséquent, $u_1 < u_0$

f est strictement croissante. Donc $u_{n+1} < u_n \longrightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n) \longrightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$

Donc, par récurrence, $\forall n \geq 0 \;\; u_{n+1} < u_n$

Par conséquent, $a > \varphi \Longrightarrow \forall n \geq 0 \;\; u_n > \varphi$, et (u_n) strictement décroissante.

4) Montrer que pour tout $x \in [\varphi;\ +\infty[$, nous avons : $f'(x) \leq \frac{1}{2\varphi}$

$f(x) = \sqrt{x+1}$

$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)' = \dfrac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

On a $x \geq \varphi$

Donc $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{\varphi+1}$

Et donc $\sqrt{x+1} \geq \varphi$

$2\sqrt{x+1} \geq 2\varphi$

Et donc, $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2\varphi}$

Par conséquent, $f'(x) \leq \frac{1}{2\varphi}$

5) En déduire que pour tout $x \in [\varphi;\ +\infty[$, nous avons : $|f(x) - \varphi| \leq \frac{1}{2\varphi}|x - \varphi|$

$x \geq \varphi$

$f(x) \geq f(\varphi)$

Or $f(\varphi) = \varphi$

Donc $f(x) \geq \varphi$

Donc $f(x) - \varphi \geq 0$

Ce qui implique que $|f(x) - \varphi| = f(x) - \varphi$

$x \geq \varphi$

Donc $x - \varphi \geq 0$

Ce qui implique que $|x - \varphi| = x - \varphi$

Le théorème des accroissements fini dit que $x \in E \rightarrow f'^{(x)} \leq \lambda \Longrightarrow x_0 \in E, x_1 \in E\ \rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \lambda$

Par conséquent, $\frac{f(x)-f(\varphi)}{x-\varphi} \leq \frac{1}{2\varphi}$

Et donc $\frac{f(x)-\varphi}{x-\varphi} \leq \frac{1}{2\varphi}$

Et donc $\frac{|f(x)-\varphi|}{|x-\varphi|} \leq \frac{1}{2\varphi}$

Par Conséquent,

$\forall x \in [\varphi;\ +\infty[,\ \ |f(x) - \varphi| \leq \frac{1}{2\varphi}|x - \varphi|$

6) En déduire que pour $a > \varphi$, la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 0$: $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \varphi|$

$a > \varphi$

D'après 3), pour tout $n \geq 0$: $u_n > \varphi$ et (u_n) strictement décroissante

Par conséquent, d'après 5),

$\forall n \geq 0, |f(u_n) - \varphi| \leq \dfrac{1}{2\varphi}|u_n - \varphi|$

Or, $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc $\forall n \geq 0, |u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{2\varphi}|u_n - \varphi|$

$5 > 4 > 0$

$\sqrt{5} > 2 > 0$

$1 + \sqrt{5} > 3 > 0$

$2\varphi > 3 > 0$

$0 < \dfrac{1}{2\varphi} < \dfrac{1}{3}$

Et on a $|u_n - \varphi|$ positif

Donc $\frac{1}{2\varphi}|u_n - \varphi| < \frac{1}{3}|u_n - \varphi|$

Par conséquent

$$\forall n \geq 0, |u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \varphi|$$

7) En déduire que pour $a > \varphi$, la suite (u_n) vérifie pour tout $n \geq 0$: $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$

Soit $P(n)$: $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$

$P(0)$: $|u_0 - \varphi| \leq \dfrac{1}{3^0}|u_0 - \varphi|$

$\dfrac{1}{3^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc $P(0)$: $|u_0 - \varphi| \leq |u_0 - \varphi|$, et donc $P(0)$ *Vrai*

Supposons $P(n)$: $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$

Alors

$\frac{1}{3}|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|u_0 - \varphi|$

D'après 6), $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \varphi|$

Alors, $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|u_0 - \varphi|$

Et donc $|u_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{3^{n+1}}|u_0 - \varphi|: P(n+1)$

Par conséquent, $P(n) \to P(n+1)$

Et donc, par récurrence, $\forall n \geq 0\ P(n)$

Par conséquent,

$$\forall n \geq 0\ |u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$$

8) En prenant a tel que $|u_0 - \varphi| < 1$, combien d'étapes sont suffisantes pour obtenir une valeur approchée de φ à 10^{-9} près ? à 10^{-100} ?

On a $|u_0 - \varphi| < 1$

Donc $\frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi| < \frac{1}{3^n}$

Et comme $|u_n - \varphi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \varphi|$, on a $|u_n - \varphi| < \frac{1}{3^n}$

En prenant n pour avoir $\frac{1}{3^n} < 10^{-9}$, on a $|u_n - \varphi| < \frac{1}{3^n} < 10^{-9}$ donc $|u_n - \varphi| < 10^{-9}$

$\frac{1}{3^n} < 10^{-p}$

$\ln \frac{1}{3^n} < \ln 10^{-p}$, donc $-n \ln 3 < -p \ln 10$, et donc $n \ln 3 > p \ln 10$, et donc :

$$n > p \frac{\ln 10}{\ln 3}$$

Donc, il suffit de prendre $n > p\frac{\ln 10}{\ln 3}$, c'est-à-dire le premier entier qui suit $p\frac{\ln 10}{\ln 3}$. Ainsi, $|u_n - \varphi| < 10^{-p}$, et donc u_n est une valeur approchée de φ à 10^{-p} près

Pour $p = 9$, on a $9\frac{\ln 10}{\ln 3} \approx 18{,}863$. Donc $n = 19$ suffit.

Pour $p = 100$, on a $100\frac{\ln 10}{\ln 3} \approx 209{,}590$. Donc $n = 210$ suffit.